

# Simulación y Visualización de la Interacción de Ondas Electromagnéticas con Medios Doblemente Negativos Mediante el Método FDTD.

Ana Grande, José A. Pereda, Oscar González y Ángel Vegas

Departamento de Ingeniería de Comunicaciones (DCom), Universidad de Cantabria.

grandeam@unican.es; peredaj@unican.es

**Abstract**—En este trabajo se ha empleado una extensión del método de las Diferencias Finitas en el Dominio del Tiempo (FDTD) para simular la propagación de ondas electromagnéticas en medios doblemente negativos (DNG). Los resultados obtenidos facilitan la comprensión del comportamiento de las ondas en estos medios, permitiendo visualizar fenómenos característicos como la refracción negativa, la formación de imágenes casi perfectas, la compensación de fase o el efecto Goos-Hänchen negativo.

**Index Terms**—Finite-difference methods, double negative media, Mobius transformation.

## I. INTRODUCCIÓN

La tendencia actual en el desarrollo de las tecnologías de la comunicación se encamina al desarrollo de nuevos materiales artificiales diseñados para obtener una determinada respuesta electromagnética. Entre estos medios destacan los medios doblemente negativos (DNG), en los que la permitividad y permeabilidad presentan simultáneamente valores negativos en cierta banda de frecuencia. La propagación de las ondas electromagnéticas en dichos medios presenta un comportamiento diferente al de los medios naturales: la refracción y la velocidad de fase son negativas, el efecto Goos-Hänchen es negativo, el efecto Doppler y la radiación Vavilov-Cerenkov se invierten, ... Para simular y visualizar estos nuevos fenómenos, los simuladores electromagnéticos son herramientas de gran utilidad, especialmente aquellos basados en técnicas en el dominio del tiempo. Entre éstas técnicas numéricas, el método de las Diferencias Finitas en el Dominio del Tiempo (FDTD) es uno de los más empleados para la resolución de problemas en electromagnetismo.

Recientemente se presentó una extensión del método FDTD que permite incorporar medios DNG en los que  $\epsilon$  y  $\mu$  dependen de la frecuencia mediante funciones racionales de orden arbitrario [1]. Dicha técnica parte de las ecuaciones de Maxwell del rotacional en el dominio de Laplace para posteriormente realizar una discretización en el dominio del tiempo compatible con el esquema de Yee. Las ecuaciones constitutivas se discretizan empleando la transformación de Moebius [2] y técnicas de procesamiento digital de señales. El

algoritmo resultante mantiene la exactitud de segundo orden y la naturaleza explícita del método FDTD convencional.

En esta comunicación la técnica FDTD mencionada se emplea para visualizar el comportamiento característico de las ondas electromagnéticas en los medios DNG. Los resultados obtenidos facilitan la comprensión de fenómenos como la refracción negativa, la compensación de fase, la formación de imágenes casi perfectas...

## II. MODELO FDTD

### A. Modelo Diferencial

Consideremos las ecuaciones de Maxwell del rotacional en el dominio de Laplace:

$$s\vec{B}(\vec{r}, s) = -\nabla \times \vec{E}(\vec{r}, s), \quad (1a)$$

$$s\vec{D}(\vec{r}, s) = \nabla \times \vec{H}(\vec{r}, s). \quad (1b)$$

Las relaciones constitutivas de los medios DNG vienen dadas por:

$$\vec{B}(\vec{r}, s) = \mu(s)\vec{H}(\vec{r}, s), \quad (2a)$$

$$\vec{D}(\vec{r}, s) = \epsilon(s)\vec{E}(\vec{r}, s). \quad (2b)$$

donde la permitividad  $\epsilon(s)$  y la permeabilidad  $\mu(s)$  pueden escribirse como:

$$\mu(s) = \mu_\infty + \frac{\sigma_h(s)}{s}, \quad (3a)$$

$$\epsilon(s) = \epsilon_\infty + \frac{\sigma_e(s)}{s}, \quad (3b)$$

siendo  $\mu_\infty$ ,  $\epsilon_\infty$  los valores de la permeabilidad y permitividad a alta frecuencia y  $\sigma_h(s)$ ,  $\sigma_e(s)$  la conductividad magnética y eléctrica, respectivamente. Consideraremos que  $\sigma_h(s)$  y  $\sigma_e(s)$  son funciones racionales de la frecuencia compleja  $s$ :

$$\sigma_h(s) = \frac{\sum_{m=0}^{M_h} a_m^{(h)} s^m}{\sum_{m=0}^{M_h} b_m^{(h)} s^m}, \quad (4a)$$

$$\sigma_e(s) = \frac{\sum_{m=0}^{M_e} a_m^{(e)} s^m}{\sum_{m=0}^{M_e} b_m^{(e)} s^m}, \quad (4b)$$

donde  $M_h$  y  $M_e$  son números enteros que determinan el orden del modelo de  $\sigma_h(s)$  y  $\sigma_e(s)$ , y  $a_m^{(h)}$ ,  $b_m^{(h)}$ ,  $a_m^{(e)}$  y  $b_m^{(e)}$  son coeficientes reales. El modelo dado por (3) y (4) es una generalización de los modelos de Drude y Lorentz, lo que

permitirá un modelado más realista del carácter dispersivo de la permitividad y la permeabilidad.

Substituyendo (2) en (1) llegamos a:

$$\mu_\infty s \vec{H}(\vec{r}, s) + \vec{J}_h(\vec{r}, s) = -\nabla \times \vec{E}(\vec{r}, s), \quad (5a)$$

$$\epsilon_\infty s \vec{E}(\vec{r}, s) + \vec{J}_e(\vec{r}, s) = \nabla \times \vec{H}(\vec{r}, s), \quad (5b)$$

donde  $\vec{J}_h(\vec{r}, s)$  y  $\vec{J}_e(\vec{r}, s)$  son las densidades de corriente magnética y eléctrica respectivamente, que se relacionan con los campos a través de la ley de Ohm:

$$\vec{J}_h(\vec{r}, s) = \sigma_h(s) \vec{H}(\vec{r}, s), \quad (6a)$$

$$\vec{J}_e(\vec{r}, s) = \sigma_e(s) \vec{E}(\vec{r}, s). \quad (6b)$$

Las ecuaciones (5) y (6) constituyen nuestro modelo diferencial de partida. Nuestro objetivo será discretizar dichas ecuaciones de acuerdo al esquema del método FDTD convencional.

### B. Modelo en Diferencias

Para discretizar (5) transformamos las ecuaciones al dominio del tiempo continuo empleando la propiedad  $sF(s) \longleftrightarrow dF(t)/dt$ . Después, las expresiones resultantes se aproximan empleando diferencias centradas para las derivadas y promediado en el tiempo para  $\vec{J}_h$  y  $\vec{J}_e$ , obteniéndose:

$$\vec{H}^{n+\frac{1}{2}} = \vec{H}^{n-\frac{1}{2}} - \frac{\Delta t}{\mu_\infty} \left[ \nabla \times \vec{E}^n + \frac{1}{2} (\vec{J}_h^{n-\frac{1}{2}} + \vec{J}_h^{n+\frac{1}{2}}) \right], \quad (7a)$$

$$\vec{E}^{n+1} = \vec{E}^n + \frac{\Delta t}{\epsilon_\infty} \left[ \nabla \times \vec{H}^{n+\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} (\vec{J}_e^n + \vec{J}_e^{n+1}) \right]. \quad (7b)$$

Para discretizar (6) escribimos las ecuaciones en el dominio  $Z$

$$\vec{J}_h(\vec{r}, Z) = \sigma_h(Z) \vec{H}(\vec{r}, Z), \quad (8a)$$

$$\vec{J}_e(\vec{r}, Z) = \sigma_e(Z) \vec{E}(\vec{r}, Z). \quad (8b)$$

Para obtener las conductividades  $\sigma_h(Z)$  y  $\sigma_e(Z)$  empleamos la técnica de la transformación de Moebius [2], la cual es equivalente a realizar en (4) el siguiente cambio de variable:

$$s = \frac{2}{\Delta t} \frac{1 - Z^{-1}}{1 + Z^{-1}} \quad (9)$$

con lo que se obtiene

$$\sigma_h(Z) = \frac{\sum_{m=0}^{M_h} c_m^{(h)} Z^{-m}}{1 + \sum_{m=1}^{M_h} d_m^{(h)} Z^{-m}}, \quad (10a)$$

$$\sigma_e(Z) = \frac{\sum_{m=0}^{M_e} c_m^{(e)} Z^{-m}}{1 + \sum_{m=1}^{M_e} d_m^{(e)} Z^{-m}}. \quad (10b)$$

Substituyendo (10) en (8) y considerando la propiedad  $Z^{-m} F(Z) = F^{n-m}$  de la transformada  $Z$ , podemos escribir las relaciones de constitución en el dominio del tiempo discreto como:

$$\vec{J}_h^{n+\frac{1}{2}} = \sum_{m=0}^{M_h} c_m^{(h)} \vec{H}^{n+\frac{1}{2}-m} - \sum_{m=1}^{M_h} d_m^{(h)} \vec{J}_h^{n+\frac{1}{2}-m}, \quad (11a)$$

$$\vec{J}_e^{n+1} = \sum_{m=0}^{M_e} c_m^{(e)} \vec{E}^{n+1-m} - \sum_{m=1}^{M_e} d_m^{(e)} \vec{J}_e^{n+1-m}. \quad (11b)$$

La implementación directa de (11) requiere  $6(M_h + M_e - 1)$  variables adicionales por celda respecto al

método FDTD convencional. Para reducir estos requerimientos de memoria, interpretamos (10) como un filtro digital de respuesta impulsiva infinita, y lo implementamos empleando la forma directa transpuesta II [3]. Este tipo de implementación es una forma canónica que reduce a  $3(M_h + M_e)$  el número de variables adicionales necesarias. Las ecuaciones finales del algoritmo FDTD resultante pueden encontrarse en [1].

### III. RESULTADOS

A continuación presentamos algunos resultados obtenidos empleando la extensión del método FDTD para medios DNG. Hemos considerado el problema bidimensional para polarización  $TE_z$ . Además de validar nuestra técnica, estas simulaciones ilustran algunos de los fenómenos característicos de la propagación de ondas electromagnéticas en los medios DNG.

Si bien la extensión del método FDTD presentada es totalmente general, en los siguientes resultados, por conveniencia y para permitir una mejor visualización de los fenómenos a simular, hemos considerado algunas simplificaciones. Así, para reducir el efecto de las reflexiones, la permitividad y permeabilidad de las láminas DNG se han elegido de forma que exista adaptación con el espacio libre. Además, para obtener un mayor ancho de banda en el que el medio sea DNG, hemos considerado un modelo de Drude para caracterizar el comportamiento dispersivo de los parámetros constitutivos

$$\epsilon_r(s) = \mu_r(s) = 1 + \frac{\omega_p^2}{s^2 + s \omega_c} \quad (12)$$

donde  $\omega_p$ , y  $\omega_c$  son la frecuencia de plasma y colisión respectivamente.

#### Propagación “backward” y refracción negativa

En la primera simulación hemos considerado una lámina DNG de parámetros  $\omega_p = 2\pi\sqrt{2}f_0$ ,  $\omega_c = 3.75 \cdot 10^{-4}\omega_p$  y 3.3 cm de grosor. La fuente es una señal armónica con una frecuencia  $f_0 = 30$  GHz, con un perfil espacial gaussiano y un ángulo de incidencia de  $45^\circ$ . A la frecuencia considerada el índice de refracción de la lámina es  $n(\omega_0) = -1 - j0.0011$ . La discretización fue  $\Delta_x = \Delta_y = 0.33$  mm y el paso temporal  $\Delta_t = 0.78$  ps. La Fig. 1 muestra la componente del campo magnético  $H_z$  en todo el dominio de simulación. La onda sufre refracción negativa en las dos interfaces de la lámina DNG.

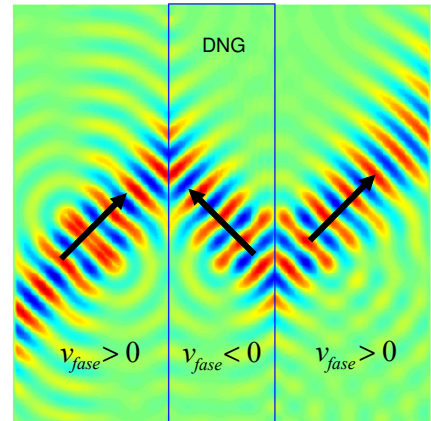


Fig. 1. Refracción negativa en una lámina DNG.

### Compensación de fase

En el segundo experimento numérico hemos simulado la propagación de una onda en una estructura formada por dos láminas adaptadas. La primera de las láminas es doblemente positiva (DPS) con parámetros  $\varepsilon_{r,1} = \mu_{r,1} = n_1 = 6$  y un espesor  $d_1 = 1.5$  cm. La segunda es DNG con un grosor  $d_2 = 1.5$  cm y unos parámetros constitutivos se caracterizan por el modelo de Drude dado en (12), siendo  $\omega_p = 2\pi\sqrt{7}f_0$  y  $\omega_c = 2.01 \cdot 10^{-4}\omega_p$ . Para una onda monocromática de frecuencia  $f_0 = 40$  GHz que incide normalmente en las láminas la diferencia de fase entre la entrada y la salida de la estructura viene dada por  $|n_1|k_0d_1 - |n_2|k_0d_2$ . A la frecuencia considerada el índice de refracción de la lámina DNG es  $n_2(\omega_0) \simeq -6$ , por lo que se cumple la condición  $d_1/d_2 = |n_2|/|n_1|$ , necesaria para que se produzca la compensación de fase. El tamaño de la celda utilizado en la simulación fue  $\Delta_x = \Delta_y = 0.15$  mm y el paso temporal  $\Delta_t = 35$  ps. Fig 2 muestra el resultado de la simulación. Se observa como la lámina DNG corrige el desfase introducido por la lámina DPS, de forma que la fase de la onda a la salida de la estructura es la misma que a la entrada.

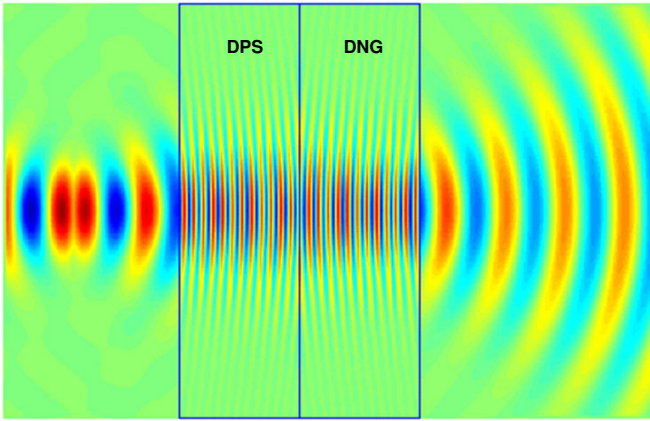


Fig. 2. Compensación de fase.

### Lente de Pendry

Analíticamente se ha demostrado que la lente perfecta propuesta por Pendry [4] sólo es realizable en el caso ideal de un medio DNG no dispersivo, sin pérdidas y con  $\varepsilon_r = \mu_r = -1$  [5]. Sin embargo, cualquier implementación física de un medio DNG es dispersiva. La dispersión y la formación de ondas superficiales en las interfaces de la lámina DNG impiden que se forme una imagen perfecta. Para visualizar este fenómeno hemos considerado una lámina DNG de parámetros  $\omega_p = 2\pi\sqrt{2}f_0$ ,  $\omega_c = 3.75 \cdot 10^{-4}\omega_p$ . Como excitación se ha considerado una fuente puntual armónica de frecuencia  $f_0 = 30$  GHz situada a la izquierda de la lámina DNG. A esa frecuencia, el índice de refracción de la lámina es  $n(\omega_0) = -1 - j0.0011$ . El tamaño de la celda utilizada fue  $\Delta_x = \Delta_y = 0.2$  mm y el paso temporal  $\Delta_t = 47$  ps. En la Fig. 3 podemos observar la formación de ondas de superficie y la aparición de dos imágenes no perfectas de la fuente, una en el interior de la lámina y la otra a la derecha de la misma.

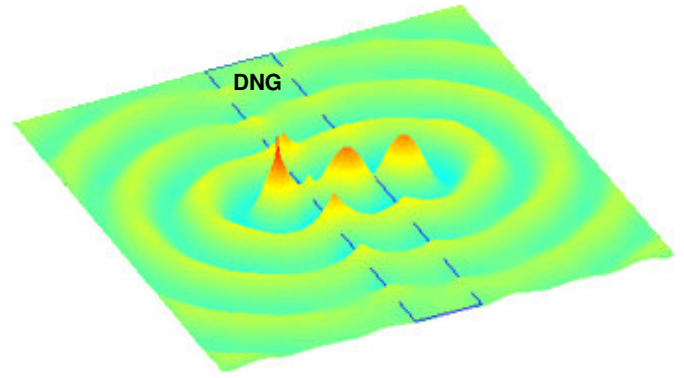


Fig. 3. Lente de Pendry. Debido a la dispersión de la lámina DNG y la formación de ondas de superficie en las interfaces no se forman imágenes perfectas.

Con los mismos parámetros que en la simulación anterior hemos realizado dos experimentos más, en los que la lámina DNG es excitada mediante dos fuentes puntuales, una a cada lado de la lámina. En el primer caso, ambas fuentes están en fase -excitación simétrica- por lo que los campos lejanos se suman y la energía es radiada en forma de onda cilíndrica, tal y como se muestra en la Fig. 4.a. En el segundo caso, las fuentes están desfasadas  $180^\circ$  -excitación antisimétrica- en consecuencia, como se aprecia en la Fig. 4.b, los campos lejanos se cancelan y la energía es guiada en forma de ondas de superficie en las interfaces de la lámina DNG.

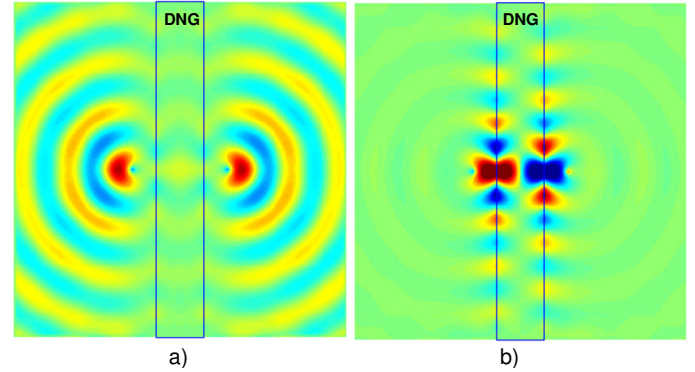


Fig. 4. a) Excitación simétrica. b) Excitación antisimétrica.

### Efecto Goos-Hänchen negativo

El efecto Goos-Hänchen consiste en un desplazamiento lateral del haz reflejado cuando se produce reflexión total. Cuando el medio sobre el que incide la onda es DPS este desplazamiento es positivo. Sin embargo, cuando dicho medio es DNG el desplazamiento del haz reflejado es negativo [6]. La Fig. 5 muestra esquemáticamente este fenómeno.

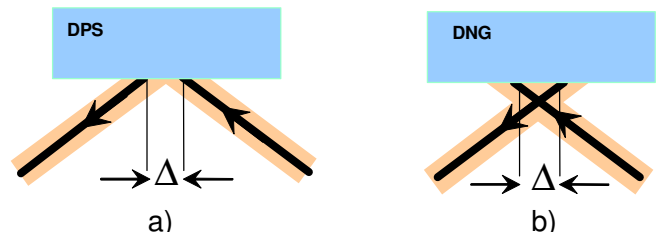


Fig. 5. Efecto Goos-Hänchen: a) positivo. b) negativo.

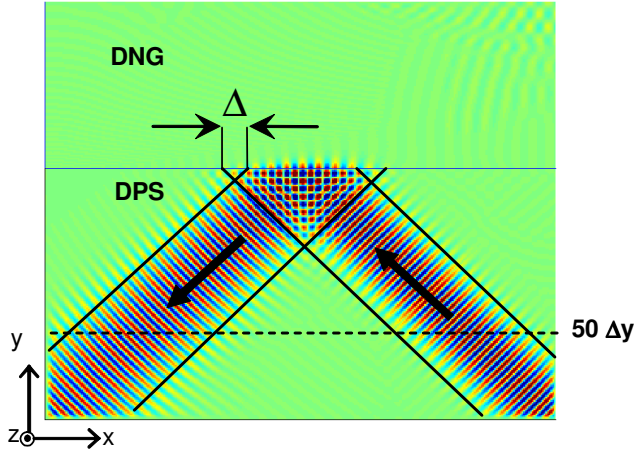


Fig. 6. Efecto Goos-Hänchen negativo.

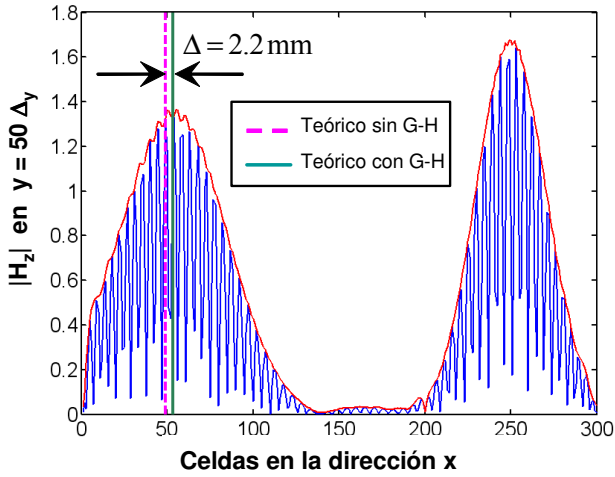


Fig. 7. Módulo de  $H_z$  en el plano  $y = 50\Delta_y$ . El valor teórico del desplazamiento coincide con el simulado.

Para visualizar el efecto Goos-Hänchen hemos simulado una onda con  $f_0 = 30$  GHz que se propaga en un medio con  $\epsilon_{r,1} = 9$  e incide, con un ángulo mayor que el ángulo crítico, en un medio DNG caracterizado por (12) con parámetros  $\omega_p = 2\pi\sqrt{4}f_0$  y  $\omega_c = 3.75 \cdot 10^{-4}\omega_p$ . A la frecuencia considerada, los parámetros constitutivos del medio DNG son  $\epsilon_{r,2}(\omega_0) = -3 - j0.003$ ,  $\mu_{r,2}(\omega_0) = -1 - j0.0011$ ,  $n_2(\omega_0) = -1.7320 - j0.0018$ . El tamaño de la celda utilizada fue  $\Delta_x = \Delta_y = 0.5$  mm y el paso temporal  $\Delta_t = 1.12$  ps. Para estos valores, el desplazamiento teórico del haz es de 2.2 mm [6]. El resultado de la simulación se muestra en Fig. 6, donde se puede apreciar cualitativamente el desplazamiento negativo del haz reflejado. En la Fig. 7 se muestra el valor del módulo de  $H_z$  en todas las celdas del eje  $x$  en el plano  $y = 50\Delta_y$ . Dos líneas verticales indican la posición teórica del máximo del haz reflejado cuando se consideran el efecto Goos-Hänchen y cuando no se considera. El valor obtenido mediante la simulación coincide con el desplazamiento.

#### IV. CONCLUSIÓN

En este trabajo se ha empleado una nueva extensión del método FDTD para el estudio y visualización de los fenómenos característicos de la interacción de ondas electromagnéticas con los medios DNG. El esquema FDTD considerado es general y permite simular medios DNG cuyos parámetros constitutivos sean funciones racionales de la frecuencia de cualquier orden. La discretización de las relaciones de constitución se realiza empleando la técnica de la transformación de Moebius.

#### REFERENCES

- [1] A. Grande, J. A. Pereda, O. González and A. Vegas, "Stability and accuracy of a Finite-Difference Time-Domain scheme for modeling Double-Negative media with high-order rational constitutive parameters," *IEEE Trans. Microwave Theory and Tech.*, vol. 56, no. 1, pp. 94-104, Jan. 2008.
- [2] J. A. Pereda, A. Vegas, and A. Prieto, "FDTD modeling of wave propagation in dispersive media by using the Mobius transformation technique," *IEEE Trans. Microwave Theory and Tech.*, vol. 50, no. 7, pp. 1689-1695, Jul. 2002.
- [3] A. V. Oppenheim and R. W. Schaffer, Discrete-time signal processing, Upper Saddle River, New Jersey: Prentice-Hall, 1999.
- [4] J. B. Pendry, "Negative Refraction Makes a Perfect Lens," *Phys. Rev. Letts.*, vol. 85, no. 18, pp. 3966-3969, Oct. 2000.
- [5] R. W. Ziolkowski y E. Heyman, "Wave propagation in media having negative permittivity and permeability," *Phys. Rev. E*, vol. 64, no. 5, 056625, Oct. 2001.
- [6] P. R. Berman, "Goos-Hänchen shift in negatively refractive media," *Phys. Rev. E*, vol. 66, 067603-1, Dec. 2002.